カタラン数　～規則をみつけよう～

右図のように，縦の並び（列）が n 列あり，横の並び（行）が 2 行である空白のマス目がある。
この $2n$ 個のマスの中に，1 から $2n$ までの自然数を 1 個ずつ埋める。ただし，上下段ともに，右の方ほどマスに入る数字が大きく，各列では下段の方が上段の数字より大きい。

	1列目	2列目		$n-1$列目	n列目
上段			……		
下段			……		

例えば，
$n=2$ の場合，4 個のマス目に入る数字は，右図の 2 通り。

1	2
3	4

1	3
2	4

問１．$n=3$ の場合，6 個のマス目に入る数字は，何通りありますか。下の作業用の枠を使用して考えなさい。　　下の **5 通り**

1	2	3
4	5	6

1	2	4
3	5	6

1	2	5
3	4	6

1	3	4
2	5	6

1	3	5
2	4	6

問２．$n=4$ の場合，8 個のマス目に入る数字は，何通りありますか。下の作業用の枠を使用して考えなさい。

1	2	3	4
5	6	7	8

1	2	3	5
4	6	7	8

1	2	3	6
4	5	7	8

1	2	3	7
4	5	6	8

1	2	4	5
3	6	7	8

1	2	4	6
3	5	7	8

1	2	4	7
3	5	6	8

1	2	5	6
3	4	7	8

1	2	5	7
3	4	6	8

1	3	4	5
2	6	7	8

1	3	4	6
2	5	7	8

1	3	4	7
2	5	6	8

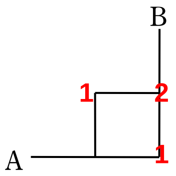
1	3	5	6
2	4	7	8

1	3	5	7
2	4	6	8

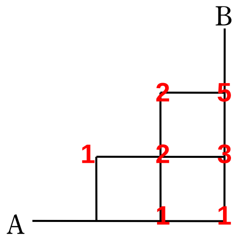
以上の 14 通り

問３．次のような階段状の経路で，地点 A から地点 B まで行く最短経路の総数は，図Ⅰ～Ⅲのそれぞれにおいて何通りありますか。

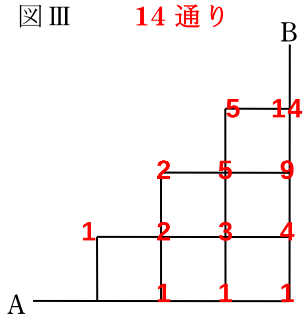
図Ⅰ　**2 通り**



図Ⅱ　**5 通り**



図Ⅲ　**14 通り**



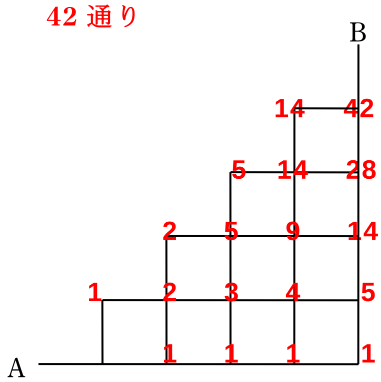
問４．問 1～２と問３の関係は，どうなっていますか。

（解答）場合の数が同じである。

〔チャレンジ問題〕

$n=5$ の場合，10 個のマス目に入る数字は，何通りありますか。

42 通り



1	2	3	4	5
6	7	8	9	**10**

これも同数ある。

〔解説〕

例えば，かっこのペア( ) を 5 組を考える。この 5 組((((()))))を順に 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 と番号付けをする。すなわち，1~5 は開くかっこ(で，6~10 は閉じるかっこ) とする。

このとき正しいかっこに組み合わせ方の総数を考える。

例えば，(()())(()) は正しいかっこの組み合わせ方。(()()))(() は正しくないかっこの組み合わせ方。4 番目の閉じるかっこ) に対応する開くかっこ (がない。

かっこを左から順に 1～10 の番号付けをして，開くかっこ (の番号を上段に，閉じるかっこ) の番号を下段に記入する。このとき，問 1，2 のマス目の数字の埋め方とかっこの並べ方が 1 対 1 に対応する。

例えば，

　上に挙げた正しいかっこの組合せ（()())(())）は

　右のマス目の並べ方に対応する。

1	2	4	7	8
3	5	6	9	10

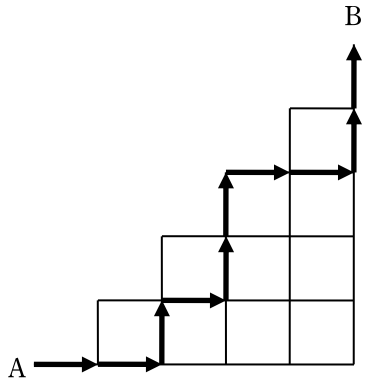
　正しくないかっこの組合せ（()()))(()）は

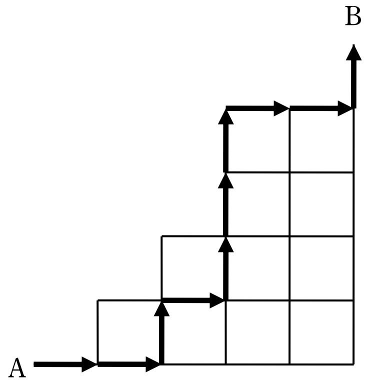
　右のマス目の並べ方に対応する。

1	2	4	8	9
3	5	6	7	10

　次に，階段状の最短経路について考えると，
開くかっこを→，閉じるかっこを↑とみて，その順列を考えると，どこで区切っても，その左側にある→の個数と↑の個数を見ると，常に→の個数の方が等しいか多い。→，↑が1区画の移動を表すとすると，その順列が階段状の最短経路に1対1に対応する。

正しいかっこの組合せ（()())(())）は，下図の左側の経路に対応する。正しくないかっこの組合せ（()()))(()）は，下図の右側の経路に対応する。





〔参考〕右図において，A → B の最短経路は全部で ${}_{10}C_5$（=252）通りある。（点線部分も通過可）
このうち，点線部分を通過する最短経路は
C → B の最短経路の総数 ${}_{10}C_4$（=210）に等しい。
ゆえに，A → B の最短経路で，点線部分を通過しない経路（太実践部分のみを通過する経路）の総数は，
${}_{10}C_5 - {}_{10}C_4$（=252-210）によって求めることができる。
点線部分を通過する最短経路が，C → B の最短経路に1対1に対応できることについては，
右図を参考に考えてください。